ADI-SOYADI:
NUMARASI: 18.11.2018

2018-2019 ÖĞRETİM YILI GÜZ DÖNEMİ MAT101 ANALİZ 1 ARASINAV SORULARI

1. $\cosh(3x-1)=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
2. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ veya $g(x)=\cos(\operatorname{sgn} x)$ fonksiyonlarının $[-\pi,2\pi]$ aralığında grafiklerini çiziniz.
3. $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\cos x=\frac{-7}{25}$ ise $\sin 2x$, $\cot x$ ve $\sec x$ değerlerini bulunuz.
4. $f(x)=\dfrac{\left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{4}}}{1+\operatorname{sgn}\left(2-x^2\right)}+e^{|x|}\sin x+\ln[\![x]\!]$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?
5. $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\leq -2\\ [\![\frac{x}{2}]\!], & -2<x<0\\ x^2-2x, & 0\leq x<3\\ 11-2x, & 3<x\leq 4\\ \operatorname{sgn}(x+1), & x>4\end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizip monotonluk aralıklarını yazınız, sınırlılığı için ne söylenebilir, belirtiniz.
6. $S,\mathbb{R}$'nin boş olmayan alttan sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $\inf S=\sup\{-s:s\in S\}$ olduğunu gösteriniz.
7. $B=\{x\in\mathbb{R}:x^2-2x-3<0\}$ kümesinin varsa supremum, infimum, maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.
8. $E=[-2,\frac{7}{3})\cup\{4,6\}$ kümesinin içini, kapanışını ve yığılma noktalarını bulunuz, $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ için $\mathbb{Q}'$ nedir?
9. Her $n\in\mathbb{N}$ için $2\cdot1+3\cdot2+4\cdot2^2+\cdots+(n+1)2^{n-1}=n\cdot2^n$ eşitliğinin doğruluğunu tümevarımla gösteriniz.

Not: Süre 120 dakikadır. 5. ve 6. Sorular 15 puan diğerleri 10 puandır.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

ANALİZ I ARASINAV CEVAP ANAHTARI

1) $\cosh(3x-1) = 2 \Rightarrow \dfrac{e^{3x-1} + e^{-(3x-1)}}{2} = 2$

$$\Rightarrow e^{3x-1} + e^{-(3x-1)} = 4$$

$$\overset{e^{3x-1}=u}{\Rightarrow} u + \frac{1}{u} = 4$$

$$\Rightarrow u^2 + 1 = 4u$$

$$\Rightarrow u^2 - 4u + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4.1.1 = 12$$

$$u_1 = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$u_2 = 2-\sqrt{3}$$

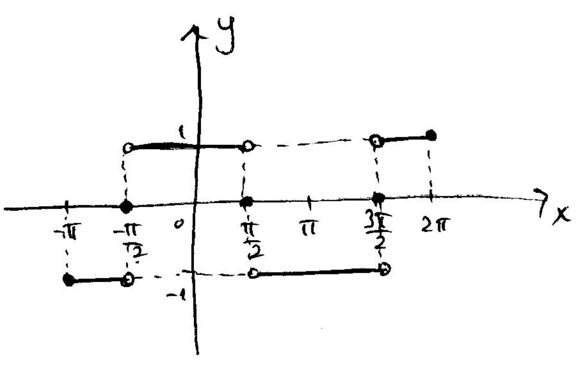
$$e^{3x_1-1} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow 3x_1 - 1 = \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = \frac{1+\ln(2+\sqrt{3})}{3}$$

$$e^{3x_2-1} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow 3x_2 - 1 = \ln(2-\sqrt{3}) \Rightarrow x_2 = \frac{1+\ln(2-\sqrt{3})}{3}$$

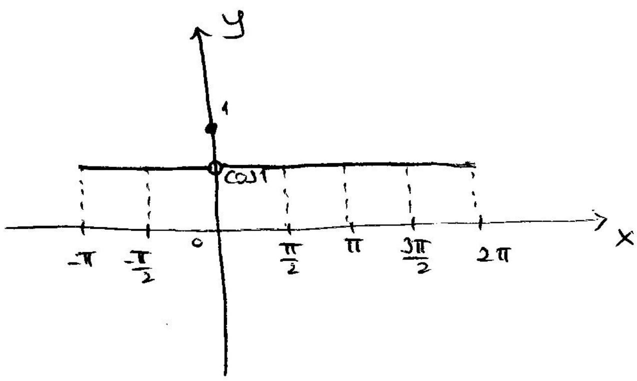
$$G.K. = \left\{ \frac{1+\ln(2+\sqrt{3})}{3}, \frac{1+\ln(2-\sqrt{3})}{3} \right\}$$

2)
$$\operatorname{sgn}(\cos x) = \begin{cases} 1, & \cos x > 0 \\ 0, & \cos x = 0 \\ 1, & \cos x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ 0, & x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \\ -1, & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\cos(\operatorname{sgn} x) = \begin{cases} \cos 1, & x \in (0, 2\pi] \\ \cos 0, & x = 0 \\ \cos(-1), & x \in [-\pi, 0) \end{cases} = \begin{cases} \cos 1, & x \in (0, 2\pi] \\ 1, & x = 0 \\ \cos 1, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

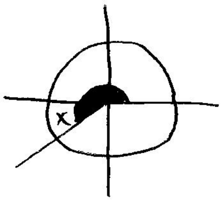


$f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$



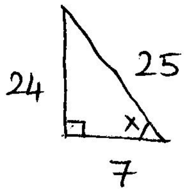
$g(x) = \cos(\operatorname{sgn} x)$

3) $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos x = -\frac{7}{25}$



$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{-24}{25} \cdot \frac{-7}{25} = \frac{336}{625}$$

$$\cot x = \frac{7}{24}$$



$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{-7}{25}} = \frac{-25}{7}$$

4) $$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}(1+\operatorname{sgn}(2-x^2))} + e^{|x|} \cdot \sin x + \ln[|x|]$$

$$f_1(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}(1+\operatorname{sgn}(2-x^2))}$$

$$D_{f_1} = \{ x \in \mathbb{R} : \ 1-x^2 > 0 , \ 1+\operatorname{sgn}(2-x^2) \neq 0 \}$$

$1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$1+\operatorname{sgn}(2-x^2) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(2-x^2) \neq -1$

$\Rightarrow 2-x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 \leq 2$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$D_{f_1} = (-1, 1)$

$f_2(x) = e^{|x|} \sin x$

$D_{f_2} = \mathbb{R}$

$f_3(x) = \ln[|x|]$

$D_{f_3} = \{ x \in \mathbb{R} : \ [|x|] > 0 \} = [1, \infty)$

$[|x|] > 0 \Rightarrow 1 \leq x < \infty$

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = \emptyset$

(5) $x \le -2$ olmak üzere $f_1(x) = 1-|x|$ denirse

$x \le -2$ iken $f_1(x) = 1+x$ olur. Yani $x \le -2$ iken $(0,1)$, $(-1,0)$ noktalarından geçen doğru çizilir.

$-2 < x < 0$ olmak üzere $f_2(x) = [\![\frac{x}{2}]\!]$ denirse

$-2<x<0 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow [\![\frac{x}{2}]\!] = -1$ olur. Yani $-2<x<0$ için $y_2 = -1$ doğru parçası çizilir

$0 \le x < 3$ olmak üzere $f_3(x) = x^2 - 2x$ denirse

$0 \le x < 3$ iken $(1,-1)$ tepe noktalı, $(0,0)$ ve $(2,0)$ noktalarından geçen parabol çizilir

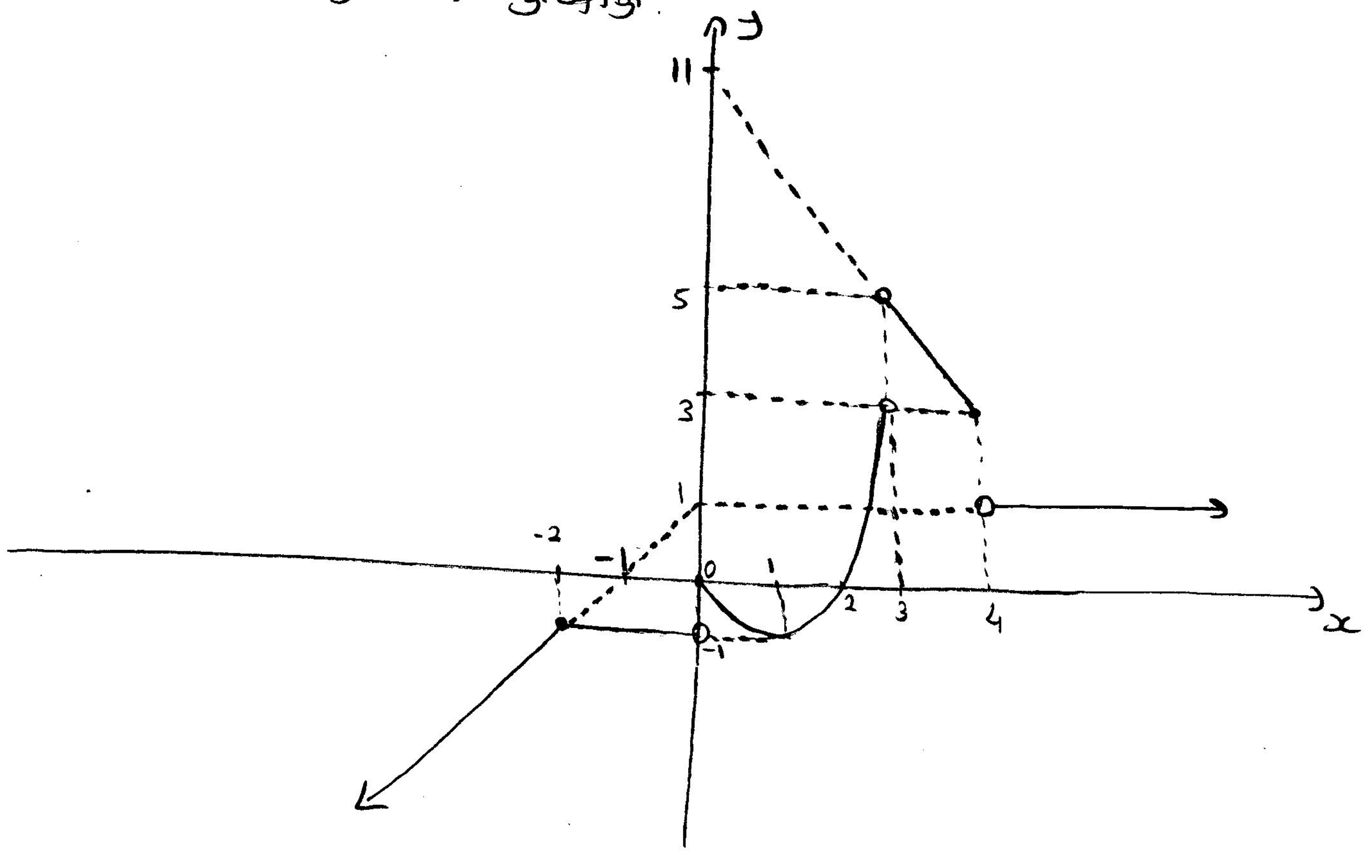
$3 < x \le 4$ olmak üzere $f_4(x) = 11 - 2x$ denirse

$3 < x \le 4$ için $(0,11)$, $(\frac{11}{2}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçası çizilir

$x > 4$ olmak üzere $f_5(x) = \text{sgn}(x+1)$ denirse

$x > 4$ iken $\text{sgn}(x+1) = 1$ olup $y = 1$ ışını çizilir.

Böylece f fonksiyonunun grafiği



biçimindedir. f fonksiyonu $(-\infty, -2]$ aralığında monoton artan $[0,1]$ aralığında monoton azalan, $(1,3)$ aralığında monoton artan ve $(3,4]$ aralığında monoton azalandır. Ayrıca f nin görüntü kümesine R_f denirse $R_f = (-\infty, 5)$ dir. $\forall x \in R_f$ için $x < 5$ olup R_f üstten sınırlıdır. Ancak R_f alttan sınırsızdır. Bu takdirde f sınırsızdır.

(8) • $\forall x \in \left(-2, \frac{7}{3}\right)$ olsun. Eğer $\varepsilon \leq \min\left\{ x+2, \frac{7}{3}-x \right\}$ alınırsa $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \left(-2, \frac{7}{3}\right) \subset E$ olur. Gerçekten; $\varepsilon \leq x+2$ olsun. O halde $x+2 \leq \frac{7}{3} - x \Rightarrow 2x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \leq \frac{1}{6}$ olur.

$\forall y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ için $x-\varepsilon < y < x+\varepsilon$ yazılır. Yine $\varepsilon < x+2 \Rightarrow -\varepsilon > -x-2$ olup

$$x-\varepsilon < y < x+\varepsilon \Rightarrow x-x-2 < x-\varepsilon < y < x+\varepsilon < x+x+2$$

$$\Rightarrow -2 < x-\varepsilon < y < x+\varepsilon < 2x+2 \leq \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow y \in \left(-2, \frac{7}{3}\right)$$

bulunur. Böylece $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \left(-2, \frac{7}{3}\right) \subset E$ dir.

" $\varepsilon \leq \min\left\{ x+2, \frac{7}{3}-x \right\} = \frac{7}{3}-x$ durumu ayrıca incelenir. "

Bu takdirde $\forall x \in \left(-2, \frac{7}{3}\right)$ için $x \in E^\circ$ olur.

$x = -2$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists y \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon)$ vardır ki $y \notin E$ dir. O halde $-2 \notin E^\circ$ olur. Benzer şekilde $x = 4$ iken $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists y \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ vardır ki $y \notin E$ ve $x = 6$ iken $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists y \in (6-\varepsilon, 6+\varepsilon)$ vardır ki $y \notin E$ dir. Yani $\{4, 6\}$ için $4 \notin E^\circ$ ve $6 \notin E^\circ$ olur. Ayrıca $E^\circ \subset E$ olduğundan $E^\circ = \left(-2, \frac{7}{3}\right)$ elde edilir.

• $\forall x \in [-2, \frac{7}{3}]$ olsun. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ olur. Yani $x \in \overline{E}$ dir.

$x = 4$ için $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $4 \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ ve $4 \in E$ olduğundan $4 \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon) \cap E$ olur. Yani $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ dir.

$4 \in \overline{E}$ bulunur. Yine $x = 6$ için $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $6 \in (6-\varepsilon, 6+\varepsilon)$ ve $6 \in E$ olduğundan $6 \in (6-\varepsilon, 6+\varepsilon) \cap E$ dir.

$6 \in \overline{E}$ olur. Eğer $\forall x \in \mathbb{R} - (E \cup \{\frac{7}{3}\})$ alınırsa

$\varepsilon < \min\{|x+2|, |\frac{7}{3} - x|\}$ için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \left(\mathbb{R} - (E \cup \{\frac{7}{3}\})\right) = \emptyset$

olur. Bu takdirde $\overline{E} = [-2, \frac{7}{3}] \cup \{4, 6\}$ elde edilir.

• $\forall x \in [-2, \frac{7}{3}]$ olsun. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için

$((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ olur. Yani $x \in E'$ dir.

$x = 4$ olsun. $\varepsilon < \frac{5}{3}$ alınırsa $((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}) \cap E = \emptyset$ olur.

Yine $x = 6$ olsun. $\varepsilon = 1$ alınırsa $((5, 7) - \{6\}) \cap E = \emptyset$ olur.

Böylece $4 \notin E'$ ve $6 \notin E'$ dir. Ayrıca $\forall x \in \mathbb{R} - (E \cup \{\frac{7}{3}\})$

için $\varepsilon < \min\{|x+2|, |\frac{7}{3} - x|\}$ alınırsa

$$((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}) \cap \left(\mathbb{R} - (E \cup \{\tfrac{7}{3}\})\right) = \emptyset$$

olur. Bu takdirde $E' = [-2, \frac{7}{3}]$ bulunur.

• $\forall x \in \mathbb{R}$ olsun. Arşimed prensibinin sonucundan herhangi iki reel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır. Yani

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\exists y \in ((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\})$

için $y \in \mathbb{Q}$ olur. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için

$((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

bulunur. Bu takdirde $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ dir.

(9) $n=1$ için $2.1=1.2$ olur. Eşitlik doğrudur

$n=k$ için eşitlik doğru olsun. Yani

$$2.1+3.2+4.2^2+\dots+(k+1).2^{k-1}=k.2^k \quad --- (1)$$

olsun.

$n=k+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$2.1+3.2+4.2^2+\dots+(k+1).2^{k-1}+(k+2).2^k=(k+1).2^{k+1}$$

eşitliğini gösterelim. O halde (1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}2.1+3.2+4.2^2+\dots+(k+1).2^{k-1}+(k+2).2^k &= k.2^k+(k+2)2^k\\ &= 2^k(k+k+2)\\ &= 2^k(2k+2)\\ &= 2^{k+1}(k+1)\end{aligned}$$

elde edilir. $n=k+1$ için eşitlik doğrudur. Bu takdirde tümevarımdan $\forall n\in\mathbb{N}$ için verilen eşitlik doğrudur

6) $\mathbb{R}$ nin boş olmayan alttan sınırlı bir S alt kümesi için $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$ olduğunu göstereceğiz.

$\inf S = a$ olsun. $\sup\{-s : s \in S\} = -a$ olduğunu gösterelim.

$\forall t \in \{-s : s \in S\}$ alalım. O zaman $t = -s$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. $\inf S = a$ olduğundan $a \leq s$ ve dolayısıyla $t = -s \leq -a$ dır. Bu durumda $-a$ sayısı $\{-s : s \in S\}$ kümesi için bir üst sınır olur.

b, $\{-s : s \in S\}$ kümesinin herhangi bir üst sınırı olsun. O halde $\forall s \in S$ için $-s \leq b$ ve dolayısıyla $-b \leq s$ dir. Bu durumda $-b$ sayısı S kümesi için bir alt sınır olur. $\inf S = a$ idi. O zaman $-b \leq a$, yani $-a \leq b$ olmak zorundadır. Böylece $-a$ sayısı $\{-s : s \in S\}$ kümesinin en küçük üst sınırıdır. Sonuç olarak $\sup\{-s : s \in S\} = -a = -\inf S$ dir.

7) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 < 0\}$

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 3$

		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$B = (-1, 3)$

$\sup B = 3$, $\inf B = -1$

B kümesinin maksimum ve minimum elemanı yoktur.